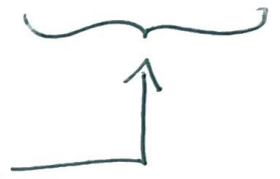


$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

deux vecteurs propres
non colinéaires



① Dans cette séance on va:

- (i) faire l'exemple 10.20 (voir feuilles 47 et 48) 12.11
- (ii) voir la notion de multiplicité algébrique et géométrique
- (iii) plus d'exemples

Exemple/activité Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

On veut calculer les valeurs propres et les espaces propres associés

① Pour valeurs propres $\rightarrow$ On calcule $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3)$

① Dans ce cas

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda) \cdot [(-2-\lambda)(5-\lambda) + 10] + 2 \cdot [4 \cdot (5-\lambda) - 8] \\ &\quad + 1 \cdot [-20 + 4 \cdot (2+\lambda)] \end{aligned}$$

$$= (4-\lambda) [\lambda^2 - 3\lambda] + 2 \cdot [-4\lambda + 12] + [4\lambda - 12]$$

$$= \lambda(\lambda-3)(4-\lambda) - (4\lambda-12) = \lambda(\lambda-3)(4-\lambda) - 4(\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3)(-\lambda^2+4\lambda-4) = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2$$

S'il on avait fait ?

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda - (4\lambda - 12) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

Comment calculer les racines ??

Entière de Gauss

Les racines dans $\mathbb{Q}$ d'un polynôme $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$) sont entières et diviseurs de a_0

si ces racines existent

Dans ce cas on essaie avec les diviseurs de 12 :

$$\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \}$$

Dès que l'on a une racine (si l'on a la chance), par exemple $\lambda = 2$, on divise $P_A(\lambda)$ par $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \\ -\lambda^3 + 2\lambda^2 \\ \hline 5\lambda^2 - 16\lambda \\ -5\lambda^2 + 10\lambda \\ \hline -6\lambda + 12 \\ -6\lambda + 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lambda - 2 \\ -\lambda^2 + 5\lambda - 6 \end{array}$$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$
et on applique formule usuelle pour les racines de $-\lambda^2 + 5\lambda - 6$:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)[-(\lambda - 2)(\lambda - 3)]$$

Alors les valeurs propres de A sont : $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$

Définition 10.24 | Soit $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si λ_K est une valeur propre de A

(= racine de $P_A(\lambda)$), on dit que la multiplicité algébrique de λ_k est m_k (entier positif) si $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ divise $P_A(\lambda)$ mais $(\lambda - \lambda_k)^{m_k+1}$ ne divise pas $P_A(\lambda)$, i.e. m_k est le plus grand entier positif tel que $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ divise $P_A(\lambda)$. | Notation: $m_k = \text{mult}_A(\lambda_k)$

Exemple: Dans l'exemple vu $\lambda=2$ a multiplicité 2,
 (suite) $\lambda=3$ a multiplicité 1.

② Pour les espaces propres $\rightarrow$ On calcule $\underline{F}_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_3)$

② $\lambda=2$

$$\underline{F}_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① Donc var. libre

$$\underline{F}_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $\overline{\lambda=3}$
 $\overline{E}_3 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

50

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

var libre

Donc

$$\overline{E}_3 = \text{Ker} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Fait Pour toute valeur propre λ_0 :
 $\dim \text{Ker}(A - \lambda_0 I_n) \leq \text{multiplicité algébrique de } \lambda_0$
 $\text{mult}_A(\lambda_0)$

(Thm. 10.30)

(Preuve) Soit $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de $\overline{E}_{\lambda_0} = \text{Ker}(A - \lambda_0 I_n)$.

On peut compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

Abs, si $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'app. lin. $T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, on a que

$$A' := [T_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(v_k)]_{\mathcal{B}} & [T(v_{k+1})]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(v_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_0 & & & & \\ & \lambda_0 & & & \\ & & & B & \\ \hline & & 0 & & C \end{array} \right) \begin{matrix} \}_{k = \dim(\overline{E}_{\lambda_0})} \\ \}_{n-k} \end{matrix}$$

Comme

$$A' = P_{B \leftarrow B_{can}}^{-1} \cdot A \cdot P_{B_{can} \leftarrow B}$$

$$\Rightarrow A' - \lambda \cdot I_n = P_{B \leftarrow B_{can}}^{-1} \cdot A \cdot P_{B_{can} \leftarrow B} - P_{B \leftarrow B_{can}}^{-1} \cdot \lambda I_n \cdot P_{B_{can} \leftarrow B}$$

$$= P_{B \leftarrow B_{can}}^{-1} (A - \lambda I_n) P_{B_{can} \leftarrow B}$$

$$\Rightarrow \det(A' - \lambda I_n) = \det(P_{B_{can} \leftarrow B}^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I_n)$$

$$\cdot \det(P_{B_{can} \leftarrow B})$$

$$= \det(P_{B_{can} \leftarrow B})^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det(P_{B_{can} \leftarrow B})$$

i.e. $P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda)$

Or

$$P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n) = \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 - \lambda & B \\ \hline 0 & C - \lambda I_{n-k} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} k = \dim(E_{\lambda_0}) \\ n-k \end{array} \right\}$$

$$= (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot \det(C - \lambda \cdot I_{n-k})$$

$$\Rightarrow (\lambda_0 - \lambda)^k \mid P_A(\lambda) \Rightarrow \dim(E_{\lambda_0} = k \leq \text{mult}_A(\lambda_0). \quad \square$$

Au fait, dans (*) on a montré aussi

THM 10.21 Si $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (i.e. A et A' sont semblables)
avec $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible

alors $P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda)$.

Définition 10.28 Pour λ une valeur propre de A , on définit la multiplicité géométrique de λ comme $\dim E_\lambda = \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)$. Notation: $\text{mult}_A(\lambda) := \dim E_\lambda$.